

ФУРЬЕ НЕМЕСЕ АЙНЫМАЛЫЛАРДЫ АЖЫРАТУ ӘДІСІ.  
ШТУРМЛИУВИЛЛЬ ЕСЕБІ. МЕНШІКТІ САНДАР МЕН МЕНШІКТІ  
ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ. СТЕКЛОВ ТЕОРЕМАСЫ.

## Шәкір Айдос Ғанижанұлы

әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті

математика кафедрасының аға оқытушысы, PhD

15 қазан 2025  
Алматы, Қазақстан



**Дәрістің мақсаты** – Дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін қойылған бастапқы-шеттік есепті Фурье немесе айнымалыларды ажырату әдісімен шешу

**Негізгі сұрақтар:**

- 1 Фурье әдісінің негізгі идеясы
- 2 Штурм-Лиувиль есебі
- 3 Меншікті сандар мен меншікті функциялардың қасиеттері. Стеклов теоремасы



Парциалдық дифференциалдық теңдеулерді шешудің негізгі әдістерінің бірі — **айнымалыларды ажырату** және **Фурье әдісі**. Бұл әдістер теңдеуді қарапайым бірөлшемді есебтерге келтіруге мүмкіндік береді.

### **Айнымалыларды ажырату әдісі**

Айнымалыларды ажырату әдісі негізінен келесі тәсілге сүйенеді:

$$u(x, t) = X(x) T(t),$$

мұндағы  $X(x)$  тек  $x$ -ке,  $T(t)$  тек  $t$ -ге тәуелді функция. Парциалдық теңдеуді осы түрге алмастыру арқылы теңдеуді екі бірөлшемді теңдеуге бөлуге болады. Мысалы, бірөлшемді толқын теңдеуі:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \Rightarrow \quad \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda,$$

мұндағы  $\lambda$  — бөлгіш тұрақты.

Штурм-Лиувилль есебі – бұл екінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуге қойылатын арнайы шекаралық есептер тобы. Бұл есебтің шешімі меншікті сандар және меншікті функциялар арқылы сипатталады, олар парциалдық дифференциалдық теңдеулерді шешудің негізгі құралы болып табылады.



## Штурм-Лиувилль теңдеуі

Жалпы форма:

$$-(p(x)X')' + q(x)X = \lambda r(x)X, \quad a < x < b, \quad (1)$$

мұндағы:

- $p(x) > 0$ ,  $r(x) > 0$  — берілген тегіс функциялар,
- $q(x)$  — берілген нақты функция,
- $\lambda$  — белгісіз сан, **меншікті сан** (eigenvalue),
- $X(x)$  — **меншікті функция** (eigenfunction).

Шекаралық шарттар көбінесе былай беріледі:

$$\alpha_1 X(a) + \beta_1 X'(a) = 0, \quad \alpha_2 X(b) + \beta_2 X'(b) = 0, \quad (2)$$

мұндағы  $\alpha_i, \beta_i$  нақты сандар және  $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0$ .

**Меншікті сандар мен меншікті функциялар**



Штурм-Лиувилль есебінің негізгі қасиеттері:

- 1 Барлық меншікті сандар  $\lambda_n$  нақты және шексіз өсіп келетін қатар құрайды:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots \rightarrow \infty.$$

- 2 Әрбір меншікті санға  $\lambda_n$  бір ғана меншікті функция  $X_n(x)$  сәйкес келеді, тек тұрақты көбейткішпен ерекшеленеді.

- 3 Ортоқоналдығы: егер  $m \neq n$ ,

$$\int_a^b r(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0.$$

- 4 Толықтық: кез келген квадратно интегралданатын функция  $f(x)$  үшін

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x), \quad c_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) X_n(x) dx}{\int_a^b r(x) X_n^2(x) dx}.$$



**Мысал: қарапайым Штурм-Лиувилль есебі**

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (3)$$

Дирихле шекаралық шарттар:

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \quad (4)$$

Мақсат: барлық меншікті сандар  $\lambda$  және меншікті функциялар  $X(x)$  табу.

**Жалпы шешім**

**1.  $\lambda = 0$  жағдайы**

$$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B.$$

Шекаралық шарттарды қолданамыз:

$$X(0) = B = 0 \Rightarrow B = 0,$$

$$X(L) = AL = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Сондықтан  $\lambda = 0$  тек нөлдік шешім береді.  $\lambda = 0$  жарамсыз (тек нөлдік шешім).



## 2. $\lambda > 0$ жағдайы

Жалпы шешім:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Шекаралық шарт  $X(0) = 0$ :

$$A \cos(0) + B \sin(0) = A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Сондықтан:

$$X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Екінші шекаралық шарт  $X(L) = 0$ :

$$B \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \Rightarrow \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Бұл үшін:

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$



## Меншікті сандар және меншікті функциялар

- Меншікті сандар:

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Меншікті функциялар:

$$X_n(x) = \sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Ортоқоналдығы:

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < L, \quad (5)$$

шекаралық шарттар:

$$X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0. \quad (6)$$

Мақсат: барлық меншікті сандар  $\lambda$  және меншікті функциялар  $X(x)$  табу.





### Жалпы шешім

#### 1. $\lambda = 0$ жағдайы

Теңдеуді шешеміз:

$$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = Ax + B.$$

Шекаралық шарттарды қолданамыз:

$$X'(0) = A = 0 \Rightarrow A = 0.$$

Сондықтан:

$$X_0(x) = B = \text{тұрақты функция.}$$

- Меншікті сан:  $\lambda_0 = 0$  - Меншікті функция:  $X_0(x) = 1$  (нормалауға болады).

#### 2. $\lambda > 0$ жағдайы

Жалпы шешім:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x) + B \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Шекаралық шарт  $X'(0) = 0$ :

$$X'(x) = -A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} x) + B\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} x),$$

$$X'(0) = B\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Сондықтан:

$$X(x) = A \cos(\sqrt{\lambda} x).$$

Екінші шекаралық шарт  $X'(L) = 0$ :

$$X'(L) = -A\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} L) = 0.$$

Сондықтан:



## Меншікті сандар және меншікті функциялар

- Меншікті сандар:

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Меншікті функциялар:

$$X_n(x) = \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- Ортоқоналдығы:

$$\int_0^L X_m(x) X_n(x) dx = 0, \quad m \neq n.$$

- Меншікті сандар:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  - Меншікті функциялар:  $\sin \left( \frac{n\pi x}{L} \right)$  - Функциялар ортогоналды және толық жүйе құрайды.



## Қорытынды

- Штурм-Лиувилль есебі – екінші ретті дифференциалдық теңдеуге қойылатын шекаралық есептер.
- Меншікті сандар мен меншікті функциялар теңдеудің шешімін Фурье қатары түрінде көрсетуге мүмкіндік береді.
- Ортоқондық және толықтық қасиеттері парциалдық теңдеулерді шешуде шешуші рөл атқарады.

**Стеклов теоремасы:** Егер  $\{X_n(x)\}$  — Штурм-Лиувилль есебінің меншікті функциялары жүйесі болса, онда кез келген квадратно интегралданатын функция  $f(x)$  үшін:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x), \quad c_n = \frac{\int_a^b r(x) f(x) X_n(x) dx}{\int_a^b r(x) X_n^2(x) dx},$$

мұндағы конвергенция  $L^2$ -норм бойынша жүзеге асады. Бұл функцияларды толық Фурье қатары түрінде өрнектеуге мүмкіндік береді.



## Қосымша ақпарат

Студенттерге қосымша әрі толыққанды мәліметтер алу үшін [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] әдебиеттер ұсынылады.



Токибетов Ж.А., Хайруллин Е.М.

Математикалық физика теңдеулері. Астана, 2010 ж.



Михлин С.Г.

Курс математической физики. М., 1968.



Владимиров В.С.

Уравнения математической физики. М., 1984.



Орынбасаров М.О., Оршубеков Н.Ә.

Математикалық физика теңдеулері. Алматы, 2009 ж.



Орынбасаров М.О., Сахаев Ш.С.

Математикалық физика теңдеулерінің септері мен жаттығулар жинағы. Алматы, 2009 ж.



Тихонов А.Н., Самарский А.А.

Уравнения математической физики. М., 2006.



Хомпыш Х.

Математикалық физика теңдеулері. Алматы, Қазақ Университеті, 2017 ж. 215 б.



НАЗАРЛАРЫҢЫЗҒА  
РАҚМЕТ!

